Electricité 1 : Electrostatique, Electrocinétique

M. El idrissi - Faculté Polydisciplinaire de Khouribga

24 mars 2020

Table des matières

Chapitre 1

Complément mathématique (Calcul vectoriel)

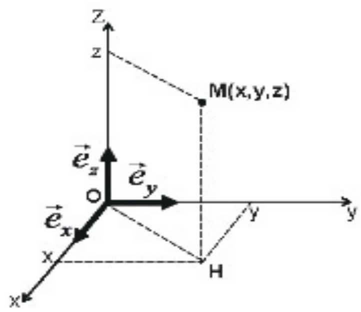
1.1 Représentation d'un point dans l'espace

On se placera toujours dans un repère orthonormé $Oxyz$, de vecteurs unitaires $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$.

1.1.1 Coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$
Si M se déplace, on a :
$d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{M} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_x + dz\vec{e}_x$
$\overrightarrow{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2$
$(d\overrightarrow{OM})^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

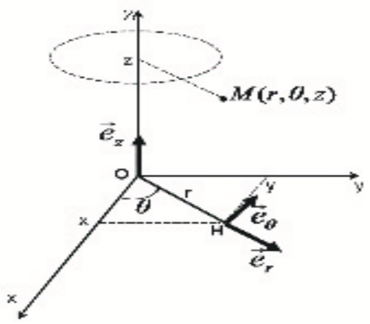


1.1.2 Coordonnées cylindriques

Vecteurs unitaires : $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$;
On definit M par sa coordonnée z et par les coordonnées polaires r, θ de son projeté sur le plan xOy.

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e}_r + z\overrightarrow{e}_z \quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{M} = dr\overrightarrow{e}_r + rd\theta\overrightarrow{e}_\theta + dz\overrightarrow{e}_z$
$\overrightarrow{OM}^2 = r^2 + z^2$
$(d\overrightarrow{OM})^2 = dr^2 + (rd\theta)^2 + dz^2$



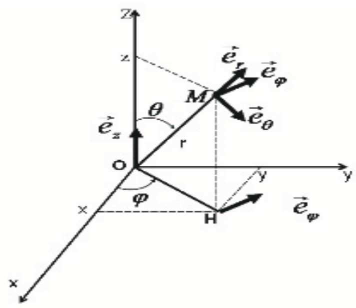
1.1.3 Coordonnées sphériques

Vecteurs unitaires : $\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta, \overrightarrow{e}_\varphi$;
On definit M par par la longeur

$r = OM$ et les deux angles θ et φ.

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e}_r \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e}_r + rd\theta\overrightarrow{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{e}_\varphi$
$\overrightarrow{OM}^2 = r^2$
$(d\overrightarrow{OM})^2 = dr^2 + (rd\theta)^2 + (r\sin\theta d\varphi)^2$

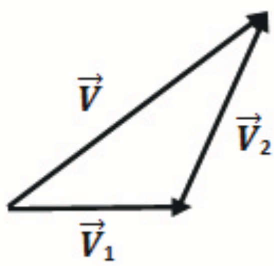


1.2 Les vecteurs

La norme d'un vecteur $\overrightarrow{V}$, habituellement écrite $\|\overrightarrow{V}\|$ sera désignée tout simplement par la lettre V.

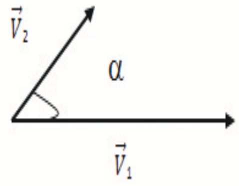
1.2.1 Somme de deux vecteurs

$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2$
$\overrightarrow{V}_1 = X_1\overrightarrow{e}_x + Y_1\overrightarrow{e}_y + Z_1\overrightarrow{e}_z$
$\overrightarrow{V}_2 = X_2\overrightarrow{e}_x + Y_2\overrightarrow{e}_y + Z_2\overrightarrow{e}_z$
$\overrightarrow{V} = (X_1 + X_2)\overrightarrow{e}_x + (Y_1 + Y_2)\overrightarrow{e}_y + (Z_1 + Z_2)\overrightarrow{e}_z$



1.2.2 Produit scalaire

$S = \overrightarrow{V}_1.\overrightarrow{V}_2$, S est un scalaire.
Par définition $S = V_1 V_2 \cos\alpha$
où l'angle α est défini par $\alpha = (\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2)$



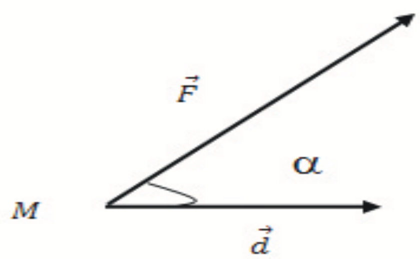
Déduction :
- Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul.
- Pour les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e}_x$, $\overrightarrow{e}_y$, $\overrightarrow{e}_z$ on a :

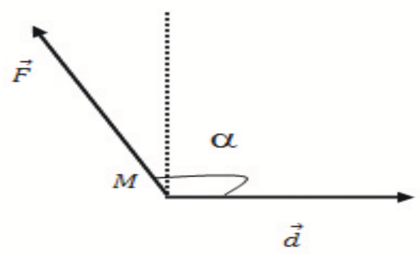
$$\overrightarrow{e}_x.\overrightarrow{e}_y = \overrightarrow{e}_y.\overrightarrow{e}_z = \overrightarrow{e}_z.\overrightarrow{e}_x = 0$$
$$\overrightarrow{e}_x.\overrightarrow{e}_x = \overrightarrow{e}_y.\overrightarrow{e}_y = \overrightarrow{e}_z.\overrightarrow{e}_z = 1$$

Expression cartésienne du produit scalaire :

$$\begin{aligned} S =&(X_1\overrightarrow{e}_x + Y_1\overrightarrow{e}_y + Z_1\overrightarrow{e}_z).(X_2\overrightarrow{e}_x + Y_2\overrightarrow{e}_y + Z_2\overrightarrow{e}_z) \\ =&X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 \end{aligned}$$

Exemple : Travail d'une force,
Si $\overrightarrow{F}$ est la force et $\overrightarrow{d}$ est le déplacement, on a :
$W = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{d} = F.d.\cos(\alpha)$.
- Si $\overrightarrow{F} \perp \overrightarrow{d}$, le travail W est nul.
- Si $\alpha = (\overrightarrow{d}, \overrightarrow{F})$ est aigu, le travail est positif, il s'agit d'un travail moteur.
- Si α est obtus, le travail est négatif, il s'agit d'un travail résistant.



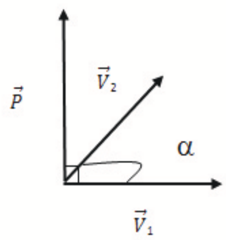


1.2.3 Produit vectoriel

$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{V}_1 \wedge \overrightarrow{V}_2$

Par définition, $\overrightarrow{P}$ est un vecteur :

- perpendiculaire au plan $(\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2)$,
- orienté de telle sorte que le trièdre $\overrightarrow{V}_1$, $\overrightarrow{V}_2$, $\overrightarrow{P}$ soit direct,
- de norme $V_1.V_2.|\sin(\alpha)|$ où $\alpha = (\overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2)$.



Déduction :

- Le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est nul.
- Pour les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e}_x$, $\overrightarrow{e}_y$, $\overrightarrow{e}_z$ on a :

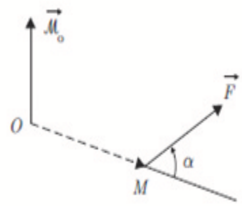
$$\overrightarrow{e}_x \wedge \overrightarrow{e}_x = \overrightarrow{e}_y \wedge \overrightarrow{e}_y = \overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{e}_z = 0$$
$$\|\overrightarrow{e}_x \wedge \overrightarrow{e}_y\| = \|\overrightarrow{e}_y \wedge \overrightarrow{e}_z\| = \|\overrightarrow{e}_z \wedge \overrightarrow{e}_x\| = 1$$

Expression cartésienne du produit vectoriel :

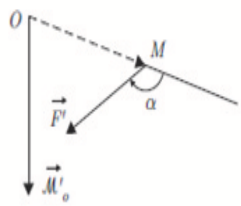
$$\begin{aligned}\overrightarrow{P} =&(X_1\overrightarrow{e}_x + Y_1\overrightarrow{e}_y + Z_1\overrightarrow{e}_z) \wedge (X_2\overrightarrow{e}_x + Y_2\overrightarrow{e}_y + Z_2\overrightarrow{e}_z)\\ =&(Y_1Z_2 - Y_2Z_1)\overrightarrow{e}_x + (X_2Z_1 - X_1Z_2)\overrightarrow{e}_y + (X_1Y_2 - X_2Y_1)\overrightarrow{e}_z\end{aligned}$$

Exemple : Moment d'une force par rapport à un point O,

On écrit : $\overrightarrow{\mathscr{M}_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$



Le produit vectoriel $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$ est toujours orienté de telle sorte que le trièdre $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}$ soit direct.



1.3 Champ Scalaire, Champ Vectoriel

1.3.1 Défnition d'un champ

On parle d'un champ d'une grandeur lorsqu'on peut définir cette grandeur en tout point M d'une région donnée de l'espace.

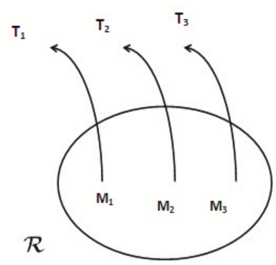
Exemples :
- Champ de température
- Champ de pesanteur
- Champ de vitesse
- etc...

1.4 Champ scalaire

Soit f une grandeur scalaire (température, pression,...). L'ensemble des valeurs $f(M)$ fonctions du point M d'une région de l'espace constitue un champ scalaire de la fonction f.

Propriété 1 - *Le champ scalaire f est uniforme si f est une constante en tout point M de la région de l'espace considéré.*
- Le champ f est permanent s'il est indépendant du temps $f(x; y; z)$.

Exemple : La donnée des températures $T1$, $T2$, $T3$,... associées aux points $M1$, $M2$, $M3$,... de la région (voir figure ci-dessous) définit un champ de température. C'est un champ scalaire.



1.5 Champ Vectoriel

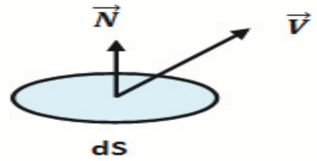
Soit $\overrightarrow{V}$ une grandeur physique vectorielle, alors l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{V(M)}$ associés à chaque point M d'une région donnée de l'espace, forme ce qu'on appelle un champ vectoriel.

Propriété 2 - *$\overrightarrow{V}$ est uniforme si la grandeur vectorielle a le même module, la même direction et le même sens en tout point M de la région de l'espace.*
- Un champ vectoriel est radial si le support du vecteur $\overrightarrow{V}(M)$ passe par un point fixe O et ceci quelque soit le point M de la région considérée.

Exemples :
- Champ de vitesses
- Champ d'accélération
- Champ de pesanteur
- etc

1.6 flux d'un vecteur

Soit un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(M)$ et une surface élémentaire $\overrightarrow{dS}$.

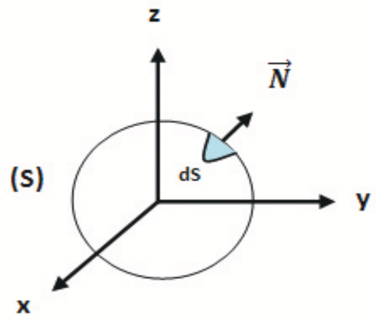


Le flux élémentaire est :

$$d\Phi = \overrightarrow{V}(M).\overrightarrow{dS} = \overrightarrow{V}(M).\overrightarrow{N}dS$$

où $\overrightarrow{N}$ est le vecteur unitaire normal à la surface dS, Par convention $\overrightarrow{N}$ est orienté de l'intérieur vers l'extérieur.

Exemple : Champ à symétrie sphérique
Calculer le flux du vecteur $\overrightarrow{V}(M) = f(r)\overrightarrow{e}_r$ à travers une sphère de centre O et de rayon r.
On a tout simplement :



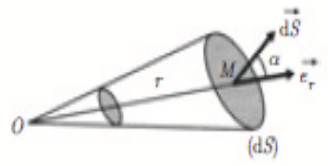
$$\Phi = \oiint_S \overrightarrow{V}(M).\overrightarrow{N}dS = \oiint_S f(r)dS$$
$$= 4\pi r^2 f(r)$$

car $f(r)$ est constant quand on se déplace sur la sphère.

1.7 Angle solide

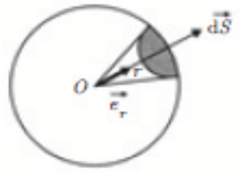
Par définition l'angle solide $d\Omega$ sous lequel on voit une surface élémentaire $\overrightarrow{dS}$ à partir d'un point donné O est :

$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS}.\overrightarrow{e}_r}{r^2} = \frac{dS\cos\alpha}{r^2}$$



Dans le cas où l'élément dS est pris sur la sphère de centre O et de rayon r, on a tout simplement :

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}\overrightarrow{N}.\overrightarrow{e}_r = \frac{dS}{r^2}$$



Exemples :
- Espace entier :

$$\Omega = \frac{1}{r^2}\oiint_s ds = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

stérad.
- Demi-espace entier : $\Omega = 2\pi$ stérad.

1.8 Opérateurs différentiels

1.8.1 Gradient

Définition 1 *Le gradient d'une fonction scalaire f(x, y, z) est un champ vectoriel noté $\overrightarrow{grad}f$ (ou encore $\overrightarrow{\nabla}f$, avec $\overrightarrow{\nabla}$ l'opérateur vectoriel polaire nabla). L'opérateur $\overrightarrow{grad}f$ associe à une fonction scalaire f(x, y, z) un vecteur de composantes $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$.*

Exemple :
Trouver l'opérateur vecteur gradient du champ scalaire :
$f(x, y, z) = x^2 + 2y + xyz$
Réponse :

$$\overrightarrow{grad}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + yz \\ 2 + xz \\ xy \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

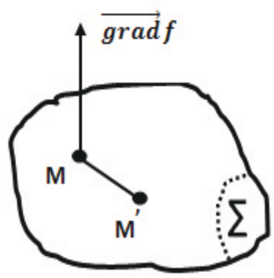
Remarque :
Le vecteur gradient dépend du point M(x ; y ; z)
Variation d'un champ scalaire :
Soit f(x, y, z, t), où t est le paramètre temps. La variation totale de la fonction f(x, y, z) en fonction des variations dx, dy, dz et dt est donnée par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt \tag{1.2}$$

On remarque que la quantité $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ n'est autre que le produit sclaire $(\overrightarrow{grad} f).\overrightarrow{dM}$. On en déduit alors la relation :

$$df = (\overrightarrow{grad} f).\overrightarrow{dM} + \frac{\partial f}{\partial t}dt \tag{1.3}$$

Remarque :
Si la fonction f ne dépend pas du paramètre t, alors : $df = (\overrightarrow{grad} f).\overrightarrow{dM}$.
Aspect Géométrique :



Soit le gradient d'une fonction scalaire $\overrightarrow{grad} f$,
Défnition : Surface de niveau
Une surface de niveau $\sum$ est toute surface pour laquelle la fonction f est une constante :

$$f(x, y, z) = cte,$$

Proposition : direction du gradient
Le gradient d'une fonction f sur une surface de niveau $\sum$ en un point M est un vecteur perpendiculaire à cette surface.
Démonstration :
Sur $\sum$ une surface de niveau, la fonction f est une constante. Ceci correspond à écrire $df = 0$.
Pour toute fonction $f(x, y, z) = const$, et pour un point M se déplaçant sur cette surface, on a :

$$df = (\overrightarrow{grad} f).\overrightarrow{dM} = 0$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{grad} f$ est normal à la surface de niveau : $\overrightarrow{grad} f \perp \sum$.
Proposition : Sens du gradient :
Le gradient donne la direction le long de laquelle le champ varie le plus. Il est dirigé dans le sens des fonctions f croissantes.
Démonstration :
Soit : $\overrightarrow{grad} f.\overrightarrow{dM} = \| \overrightarrow{grad} f) \| . \| \overrightarrow{dM} \| . \cos(\theta)$, avec $\theta = (\widehat{\overrightarrow{grad} f, \overrightarrow{dM}})$
df est maximal si $\cos(\theta) = 1$ càd si $\overrightarrow{grad} f // \overrightarrow{dM}$
Le vecteur $\overrightarrow{grad} f$ est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

1.8.2 Divergence

L'opérateur div (ou encore $\overrightarrow{\nabla}.$) associe à un vecteur $\overrightarrow{V}$ le produit scalaire de $\overrightarrow{\nabla}$ par ce vecteur :

$$div\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{V} \text{ (scalaire)}$$

La divergence d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ en coordonnées cartésiennes est :

$$div\overrightarrow{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

Exemple : $\overrightarrow{V} = 2z\overrightarrow{e_x} + 3\overrightarrow{e_y} + 2xy\overrightarrow{e_z} \quad \Rightarrow \quad div\overrightarrow{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$

1.8.3 Divergence et flux d'un vecteur

Par définition, la différentielle du flux de $\overrightarrow{V}$ à travers une surface fermée (S) est reliée à la divergence de $\overrightarrow{V}$ par :

$$d\Phi = div\overrightarrow{V}d\tau \tag{1.4}$$

où $d\tau$ représente un volume elementaire : la divergence d'un champ vectoriel représente le flux de ce vecteur sortant de l'unite de volume. On en déduit :

$$\Phi = \oiint_{(S)} \overrightarrow{V}.\overrightarrow{dS} = \iiint_{(\tau)} div\overrightarrow{V}d\tau \tag{1.5}$$

Cette formule, dite de Green-Ostrogradsky facilite parfois le calcul du flux d'un vecteur à travers une surface fermée.

1.8.4 Rotationnel

L'opérateur $\overrightarrow{rot}$ (ou encore $\overrightarrow{\nabla}\wedge$) associe à un vecteur $\overrightarrow{V}$ le produit vectoriel de $\overrightarrow{\nabla}$ par ce vecteur :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V} \tag{1.6}$$

Exemple : Soit le vecteur

$$\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$$

On a :

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.8.5 Laplacien

L'opérateur Laplacien (noté $\Delta = \overrightarrow{\nabla}^2$) est défini par :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.7}$$

Il peut s'appliquer à une fonction scalaire :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ou à un vecteur :

$$\begin{aligned} \Delta\overrightarrow{V} &= \frac{\partial^2 \overrightarrow{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{V}}{\partial z^2} \\ &= \overrightarrow{e}_x \Delta V_x + \overrightarrow{e}_y \Delta V_y + \overrightarrow{e}_z \Delta V_z \end{aligned} \tag{1.8}$$

Exemple : $\Delta r^2 = \Delta(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} = 6$

1.8.6 Formules de base

1. $\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\nabla}(U) = \overrightarrow{\nabla}^2 U$ soit div(grad U)=$\Delta(U)$
2. $\overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla} U) = 0$
3. jj

Chapitre 2

Champ et Potentiel Electrostatique

2.1 Charge électrique

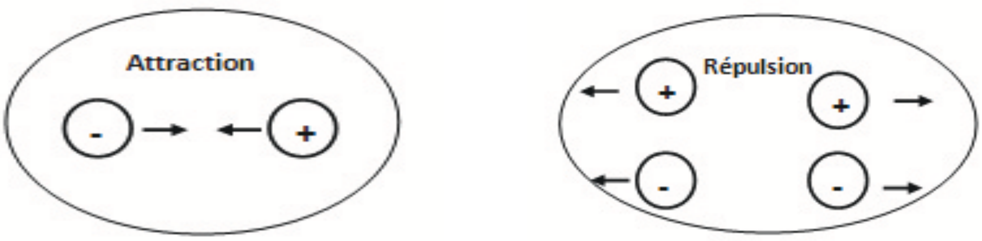
C'est une quantité scalaire, càd qu'elle peut être négative, positive ou nulle. Elle s'exprime en Coulomb ("C" du nom du physicien français Charles Coulomb) dans le système MKSA. Elle est quantifiée (elle n'existe qu'en quantité discrète).

$$q = \pm ne \qquad avec \qquad n \in \mathbb{N}$$

La charge élémentaire $|e|$ vaut $|e| \simeq 1,602.10^{-19}C$. La charge de l'électron vaut $-|e|$, celle du proton est la plus petite charge électrique qu'on ait pu isoler jusqu'à présent. Les atomes sont constitués des particules chargés à savoir les électrons et les protons dont les propriétés sont données par :

	Charge	Masse
Proton	$q_p = +1,602.10^{-19}C$	$m_p = 1,67.10^{-24}Kg$
Electron	$q_e = -1,602.10^{-19}C$	$m_n = 9,10.10^{-31}Kg$

L'étude expérimentale a montré que les charges de même signe se repoussent (répulsion) et les charges de signe contraires s'attirent (attraction).



Remarque :

La charge électrique est quantifié, veut dire que dans la nature, on ne trouve

que des multiples de la charge du proton ou de l'électron, ça c'est l'interprétation microscopique (Echelle atomique), mais macroscopiquement, on peut parler de densité de charge, dans ce cas la charge peut prendre n'importe quelle valeur.
Il s'agit essentiel de faire la distinction entre deux types de charges :

2.1.1 Les charges ponctuelles

Ce sont des charges supposées de dimension nulle par analogie avec la notion du point matériel.

2.1.2 Les Distributions continues de charge

Ce sont des charges macroscopiques obtenues en faisant la sommation (intégral) sur toutes les charges infnitésimales dq. Nous avons alors les densités :

- linéique sur un fil : $\lambda = \frac{dq}{dl} \quad [C.m^{-1}]$
  $\Longrightarrow q = \int \lambda dl$
- surfacique (ou surperficielle) sur une surface : $\sigma = \frac{dq}{dS} \quad [C.m^{-2}]$
  $\Longrightarrow q = \iint \sigma dS$
- volumique dans un volume : $\rho = \frac{dq}{d\tau} \quad [C.m^{-3}]$
  $\Longrightarrow q = \iiint \rho d\tau$

Propriété 3 *Une densite volumique est considérée uniforme quand :*

$$\rho(M) = \rho_0 = cte \Rightarrow q_T = \rho_0.v$$

De la même façon :
- Dans le cadre d'une distribution uniforme surfacique $q_T = \sigma_0.S$
- Dans le cadre d'une distribution uniforme linéique, $q_T = \lambda_0.L$

2.2 Loi de Coulomb

Définition 2 *Soient q_1, q_2 deux charges ponctuelle, placées en M et M' et distantes de r, plongées dans le vide. La force d'interaction dite électrostatique exercée par q_1 sur q_2 est donnée par la loi de Coulomb :*

$$\overrightarrow{F}_{1\to 2} = \frac{q_1.q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r} = -\overrightarrow{F}_{2\to 1}$$

$\overrightarrow{u_r}$ est le vecteur unitaire porté par le support de MM' et $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 S.I$
.

Cette force est en $\frac{1}{r^2}$. On dit qu'elle est newtonienne. C'est une force conservative. Elle est répulsive si les charges sont de même signe ($q_1.q_2 > 0$), elle est attractive si elles sont de signes contraires ($q_1.q_2 < 0$).

2.3 Principe de superposition

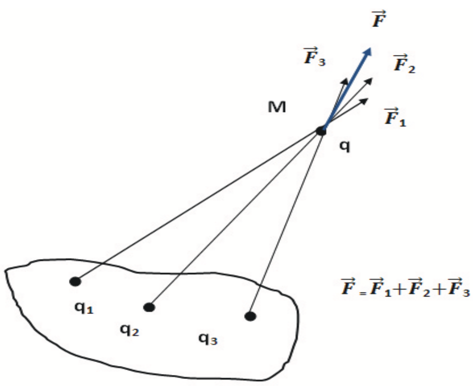
Soit une charge ponctuelle $M(q)$ soumise à l'action de N charge ponctuelle q_i. La force ressenti par $M(q)$ est :

$$\overrightarrow{F}_{res} = \sum_{i}^{N} \frac{q_i.q}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \overrightarrow{u}_i$$

avec : $\overrightarrow{u}_i = \frac{\overrightarrow{M_iM}}{||\overrightarrow{M_iM}||}$.

Ceci constitue le principe de superposition. On postule qu'il y a linéarité entre la cause et les effets.

On peut généraliser ceci pour une distribution volumique, surfacique ou linéique.



2.4 Champ et potentiel électrostatique

La seule présence d'une charge ponctuelle q au point M (comme d'ailleurs d'une masse ponctuelle m, dans le cas de la gravitation) permet de définir deux propriétés en un point M' de l'espace environnant :
– une propriété vectorielle, le champ électrostatique :

$$\overrightarrow{E}_M = k\frac{q}{r^2}\overrightarrow{u}_{MM'} = \frac{\overrightarrow{F}}{q'}$$

– une propriété scalaire, le potentiel électrostatique (défini à une constante près) :

$$V_M = k\frac{q}{r} + cte$$

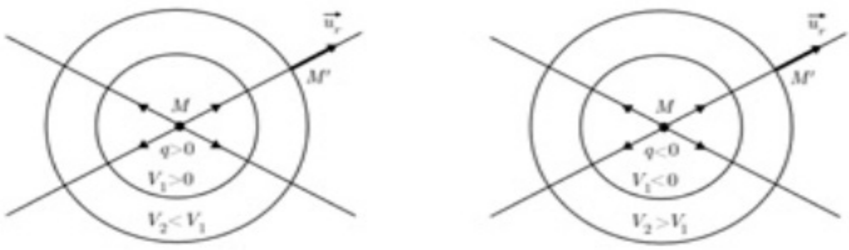
– et une relation entre les deux propriétés :

$$\overrightarrow{E}_M = -\overrightarrow{grad}V_M, \quad ou \quad dV_M = -\overrightarrow{E}_M.d\overrightarrow{M}$$

En effet, étant donné que $\overrightarrow{grad}(\frac{1}{r}) = -\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$ et $\overrightarrow{u}_{MM'} = \frac{\overrightarrow{r}}{r}$, on aura :
$\overrightarrow{E}_M = k\frac{q}{r^2}\overrightarrow{u}_{MM'} = k\frac{q}{r^3}\overrightarrow{r} = -\overrightarrow{grad}(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}) = -\overrightarrow{grad}V_M$
Donc : $V_M = k\frac{q}{r} + cte$

2.4.1 Lignes de champ et surfaces équipotentielles

Les lignes de champ, qui sont les courbes tangentes en chaque point au champ $\overrightarrow{E}$, sont ici des droites passant par la charge ponctuelle q placée en M. Ces lignes sont orientées centrifuges ou centripètes suivant que q est respectivement positive ou négative. Pour établir l'équation d'une ligne de champ, il suffit d'écrire $\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{0}$ avec dl un élément de longueur de ligne de champ et $\overrightarrow{E}$ le champ électrostatique.
Les surfaces équipotentielles $V = cte$ sont des sphères centrées en M. En



effet, sur ces surfaces, on a :

$$dV = (\overrightarrow{gradV}).\overrightarrow{dl} = -\overrightarrow{E}.\overrightarrow{dl} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{dl} \perp \overrightarrow{E}$$

Exemple : Les lignes de champ crée par une charge ponctuelle q, placée en un point O.
le champ électroqtatique $\overrightarrow{E}(M)$ crée par la charge q en un point M est :

$$\overrightarrow{E}_M = K\frac{q}{r^3}\overrightarrow{r} \quad avec \quad r = OM$$

On exprime $\overrightarrow{dl}$ en coordonnées sphériques et dans la base sphérique :

$$\overrightarrow{dl} = dr\overrightarrow{e}_r + rd\theta\overrightarrow{e}_\theta + r\sin(\theta)d\varphi\overrightarrow{e}_\varphi$$

$\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{0}$ implique que $d\varphi = 0$ et $d\theta = 0$, on en déduit que φ et θ sont égales à des constantes ; les lignes de champ sont donc des droites formant un faisceau de sommet O.

2.4.2 Cas d'un système de charges

Lorsque n charges ponctuelles existent simultanément en des points M_1, M_2,. . . ,M_n, le principe de superposition permet d'écrire :
– pour le champ résultant en un point M (avec $r_i = M_iM \neq 0$) :

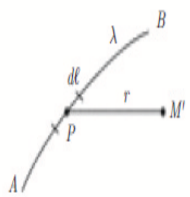
$$\overrightarrow{E}_M = K\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\overrightarrow{u}_{M_iM}$$

– et pour le potentiel résultant :

$$V_M = K\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Dans le cas de distributions continues de charges, on aura de même :
- pour un fil chargé uniformément :

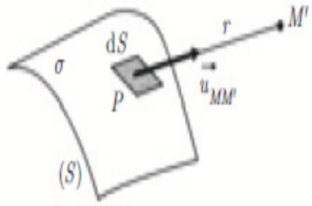
$$\overrightarrow{E}_M = k\int_{\widehat{AB}} \frac{\lambda dl}{r^2}\overrightarrow{u}_{PM}$$
$$V_M = k\int_{\widehat{AB}} \frac{\lambda dl}{r}$$



- pour une surface chargée uniformément :

$$\overrightarrow{E}_M = K \int_{(S)} \frac{\sigma dS}{r^2} \overrightarrow{u}_{MM'}$$

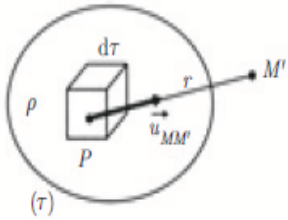
$$V_M = K \iint_{(S)} \frac{\sigma ds}{r}$$



- et pour un volume chargé uniformément :

$$\overrightarrow{E}_M = K \iiint_{(\tau)} \frac{\rho d\tau}{r^2} \overrightarrow{u}_{MM'}$$

$$V_M = K \iiint_{(\tau)} \frac{\rho d\tau}{r}$$



Exemples :
1- Champ crée par un disque uniformement chargé en surface avec la densité σ_0 (démonstration : voir TD)
Par application des formules précedentes, et en s'appuyant sur la symétrie de l'étude, on obtient, avec α l'angle entre l'axe de symétrie et le sommet du disque, et $\overrightarrow{u}$ vecteur directeur de l'axe de symétrie :

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}(1 - cos(\alpha))\overrightarrow{u}$$

.
2- Champs crée par un fil de longeur infini uniformement chargé avec la densité λ_0
Par application, on obtient :

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0.OM}\overrightarrow{u}$$

2.5 Théorème de Gauss

Soit un ensembe de charges, ponctuelles ou non, et une surface fermée S. Les charges q_{ext}, situées à l'extérieur de S, créent un champ électrostatique dont le flux à travers S est nul. Les charges q_{int} ; à l'intérieur de S, créent un champ dont le flux est égal à $\frac{q_{int}}{\epsilon_0}$. D'ou :

$$\phi = \oiint_{Sferme} \overrightarrow{E}\overrightarrow{dS} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$$

Enoncé :
Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée S est égal au quotient par ϵ_0 de la somme des charges électriques situées à l'intérieur de S.

2.5.1 Cas d'une distribution continue de charges

$$\sum q_{int} = \iiint_v \rho dv$$

où v est le volume à l'intérieur de la surface S. D'où :

$$\phi = \oiint_{Sferme} \overrightarrow{E}\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_v \rho dv$$

2.5.2 Expression locale du théorème de Gauss

Soit une destribution de charge (D) contenue dans un volume v délimité par une surface fermée S. Soit ρ la densité volumique de charge.
Le volume v contient la charge totale q de sorte que :

$$q = \iiint_v \rho dv$$

Le théorème de Green Ostrogradsky implique :

$$\phi = \iint_S \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \iiint_v div\overrightarrow{E}.dv$$

Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\iiint_v div\overrightarrow{E}.dv = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_v \rho dv$$

d'où :

$$div\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Remarque :
Dans les régions où il n'y a pas de charges électriques $\rho = 0$; $div\overrightarrow{E} = 0$, le flux électrique est conservatif.
Démarche à suivre pour appliquer le théorème de Gauss :
Le théorème de Gauss permet de calculer facilement le champ créé par une distribution de charges possédant une symétrie soit cylindrique, soit sphérique. La démarche à suivre est la suivante :
a) Choisir une surface fermée, à travers laquelle on claculera le flux, et qui a la même symétrie que le corps étudié.
b) Calculer indépendament :
- la charge totale contenue dans cette surface
- le flux de $\overrightarrow{E}$ à travers cette surface

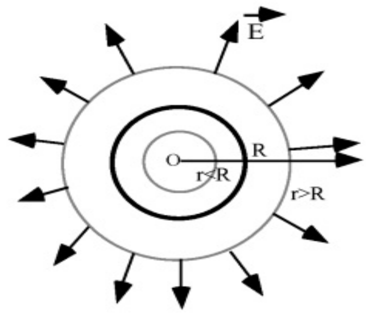
c) Appliquer la formule du théorème de Gauss :

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

.

Exemple : Cas d'une charge sphérique de rayon R et de densité volumique ρ.

Si on choisit une surface de Gauss S_G qui soit une sphère à la charge et de rayon r, le flux de $\overrightarrow{E}$ vaut $E.4\pi r^2$.
D'après le théorème de Gauss, ce flux est aussi égal à la somme des charges internes à S_G divisée par ϵ_0 plus la somme des charges surfaciques divisée par $2\epsilon_0$.
Il n'y a pas de charges à la surface de S_G.



- Si r<R, les charges internes à S_G valent $\rho.\frac{4\pi r^3}{3}$, Donc

$$E.4\pi r^2 = \frac{4\pi.r^3}{3}.\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

D'où,

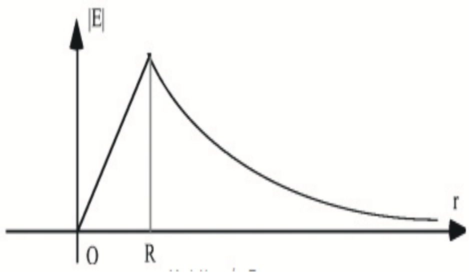
$$E = \frac{\rho.r}{3\epsilon_0}$$

- Si r>R, toute la charge q est interne à S_G. Donc,

$$E.4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{4\pi.R^3}{3}.\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

D'où

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{\rho.R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$



Chapitre 3

Conducteurs en équilibre, condensateurs

3.1 Conducteur seul en équilibre

Les corps électriquement neutres contiennent en grand nombre des charges électriques positives et négatives en quantité égale.
Dans un isolant, ces charges ne peuvent pas se déplacer : ni celles qui y sont au départ, ni celles que l'on y apporte.
Dans un conducteur, elles peuvent se déplacer. Elles le feront si elles sont soumises à des forces, en particulier sous l'effet d'un champ électrique.
Dans un ***système isolé***, la charge électrique se conserve : $\sum q = 0$. Par exemple, un atome non ionisé se comporte comme une particule électriquement neutre.

3.1.1 Intérieur d'un conducteur en équilibre

Nous venons de voir qu'un conducteur contient des charges susceptibles de se déplacer. Il est dit en équilibre si ces charges restent immobiles.
L'état électrique est invariable. Cela prouve qu'elles ne subissent pas de forces, donc qu'il n'y a pas de champ électrique à l'intérieur du conducteur.

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$$

Dans ces conditions, si nous appliquons le théorème de Gauss à toute surface fermée contenue au sein du conducteur, le flux de $\overrightarrow{E}$ est nul. Nous en déduisons que cette surface ne contient pas de charges ou, pour être plus précis, que la somme des charges qu'elle contient est nulle : sa densité volumique de charges ρ est nulle. Dans tout élément de volume, il y a autant de charges positives que de charges négatives.

$$\rho = 0$$

Comme $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = \overrightarrow{0}$, cela prouve que V est constant dans tout le conducteur.

$$V = Cte$$

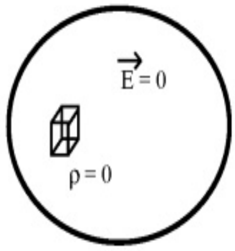


FIGURE 3.1 – Intérieur d'un conducteur en équilibre

3.1.2 Surface d'un conducteur en équilibre

Puisque tout le conducteur est à un même potentiel, sa surface est une surface équipotentielle. Donc, le champ électrique à la surface est perpendiculaire à cette surface.
Nous avons dit précédemment que les charges sont immobiles parce qu'elles ne subissent pas de forces. Cela est vrai au milieu du conducteur. Il existe un endroit où les charges peuvent subir des forces sans pour autant se déplacer, c'est lorsque ces forces sont perpendiculaires à la surface et dirigées vers l'extérieur. Elles les plaquent sur la surface. Cela est donc conforme à l'existence d'un champ électrique à la surface du conducteur, orthogonal à la surface. Cela prouve également qu'à la surface du conducteur, il peut exister une densité de charges non nulle.
Les charges d'un conducteur en équilibre ne peuvent exister qu'à sa surface. On peut définir la densité surfacique de charges :

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

Puisque la seule force pouvant exister doit plaquer les charges sur la surface, il faut que le champ à la surface $\overrightarrow{E}$ soit dirigé vers l'extérieur si les charges

surfaciques sont positives, et vers l'intérieur si elles sont négatives.
Les lignes de champ sont donc perpendiculaires à la surface du conducteur.
Là où les charges surfaciques sont positives, ces lignes de champ sortent. Dans

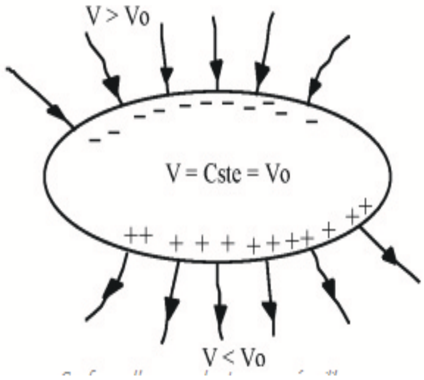


FIGURE 3.2 – Surface d'un conducteur en équilibre

le cas contraire, elles entrent.
Une ligne de champ qui sort d'un conducteur en équilibre ne peut pas y revenir en un autre point, même si, en cet autre point, les charges surfaciques sont négatives. En effet, on sait que les lignes de champ se dirigent dans le sens des potentiels décroissants. Or tout le conducteur est équipotentiel.

3.1.3 Champ électrique à proximité immédiate d'un conducteur en équilibre

Nous allons calculer le champ électrique $\overrightarrow{E}$ à proximité immédiate de la surface d'un conducteur en équilibre.
Pour cela, nous appliquons le théorème de Gauss à une surface fermée S_G dont un coté serait un élément infiniment petit dS parallèle à la surface S_c du conducteur, le reste de S_G étant soit perpendiculaire à S_c soit à l'intérieur du conducteur.
Le flux de $\overrightarrow{E}$ à travers S_c est donc égal à $E.dS$ puisqu'il n'y a que sur dS que $\overrightarrow{E}$ est non nul et perpendiculaire à S_G.
D'après le théorème de Gauss, ce flux est égal à la somme des charges contenues par S_G divisée par ϵ_0. Or les charges internes à S_G sont celles qui sont à la surface de C, soit σdS.
Donc,

$$E.dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$$

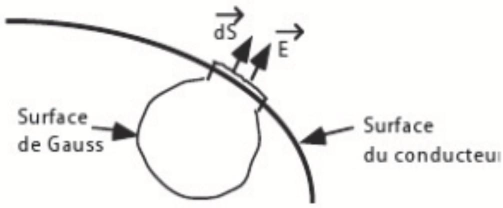


FIGURE 3.3 – Clacul du champ près de la surface du conducteur

Soit,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

ou plutôt,

$$\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.\overrightarrow{u}$$

en désignant par $\overrightarrow{u}$ le vecteur unitaire sortant perpendiculairement à la surface de C.
La relation $\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.\overrightarrow{u}$ porte le nom de théorème de Coulomb.
On voit donc que ce sont les charges surfaciques qui créent le champ à proximité du conducteur.

3.1.4 Champ électrique sur la surface même d'un conducteur en équilibre

Si nous modifions légèrement la surface de Gauss précédente en posant l'élément dS sur la surface de C, le flux de $\overrightarrow{E}$ à travers S_c est toujours égal à $E.dS$.
Mais, cette fois, les charges surfaciques de C sont aussi à la surface de S_G.
D'après le théorème de Gauss, le flux de $\overrightarrow{E}$ est égal à la somme des charges surfaciques de S_G divisée par $2\epsilon_0$.
Donc,

$$E.dS = \frac{\sigma dS}{2\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.\overrightarrow{u}$$

En résumé,

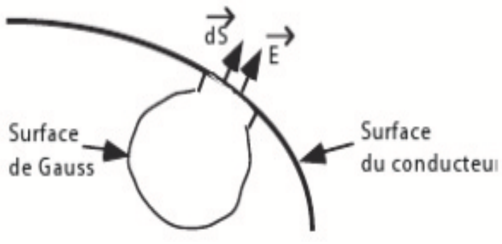


FIGURE 3.4 – Clacul du champ sur la surface du conducteur

— à l'intérieur d'un conducteur en équilibre, le champ électrique $\overrightarrow{E}$ est nul.
— sur la surface même règne un champ $\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.\overrightarrow{u}$.
— à proximité immédiate du conducteur, $\overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.\overrightarrow{u}$.

Le champ $\overrightarrow{E}$ subit donc une discontinuité à la traversée de la surface. Ce n'est bien sûr pas le cas du potentiel, car pour que le potentiel soit discontinu, il faudrait que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ soit infini.

3.1.5 Pression électrostatique

La pression électrostatique est la pression subie par la surface d'un conducteur électrique chargé. Elle s'exerce perpendiculairement à la surface du conducteur, de l'intérieur vers l'extérieur. Elle tend ainsi à arracher les charges qui sont retenues sur le conducteur, et peut donc être considérée comme à l'origine du phénomène d'émission par effet de champ.
L'ensemble des forces subies par les charges dq d'un élément de surface dS vaut :

$$d\overrightarrow{F} = dq\overrightarrow{E} = \sigma.dS.\frac{\sigma}{2\epsilon_0}.\overrightarrow{u} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}.dS.\overrightarrow{u}$$

On peut donc calculer la pression :

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

Un conducteur en équilibre subit donc une pression de dilatation :

$$P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

en tout point de sa surface. La résultante des forces s'excerçant sur la surface d'un conducteur a pour expression :

$$\overrightarrow{F} = \iint_s d\overrightarrow{F} = \iint_s \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\overrightarrow{S}.$$

3.1.6 Cas d'un conducteur comportant une cavité vide

Imaginons un conducteur en équilibre électrostatique contenant une cavité vide. A priori, il pourrait exister des charges sur la surface de la cavité.
Puisque $\overrightarrow{E} = 0$ dans le conducteur, l'application du théorème de Gauss à

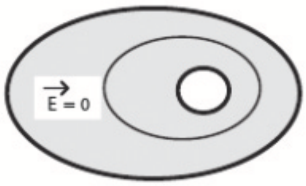


FIGURE 3.5 – Conducteur contenant une cavité vide

une surface fermée entourant la cavité et située dans C montre qu'il n'y en a pas, ou du moins que la somme des charges portées par la paroi de la cavité est nulle.
Or, s'il existait par endroit des répartitions surfaciques de charges positives ou négatives, il en sortirait des lignes de champ. Ces lignes de champ ne pourraient que revenir sur le même conducteur et nous avons vu que cela est impossible.
La surface de la cavité est une équipotentielle. Comme celle ci ne contient pas de charges, le potentiel ne peut pas y passer par un maximum, ni par un minimum. Il est donc constant et égal à celui du conducteur. Et puisque $V = Cte$ dans la cavité, on en déduit que $\overrightarrow{E} = 0$.
$\overrightarrow{E} = 0$ à l'intérieur de la cavité.
Il n'y a pas de charges sur la surface interne de la cavité.
Toute la cavité est au même potentiel que le conducteur.

3.2 Ensemble de conducteurs en équilibre

3.2.1 Influence entre deux conducteurs en équilibre - Théorème des éléments correspondants

Imaginons deux conducteurs en équilibre et en présence l'un de l'autre mais seuls dans l'espace.
Chacun d'eux est à un potentiel absolu V. Par exemple, le potentiel V_1 du conducteur C_1 est supérieur à celui V_2 de C_2. Puisque les lignes de champ

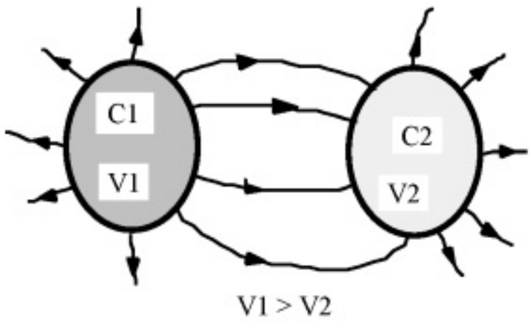


FIGURE 3.6 – Influence entre deux conducteurs en équilibre

se dirigent dans le sens des potentiels décroissants, celles qui partent de C_1 vont vers l'infini ou vers C_2. Celles qui partent de C_2 ne peuvent aller que vers l'infini.
Choisissons un tube de champ allant de C_1 vers C_2. Si nous calculons le flux

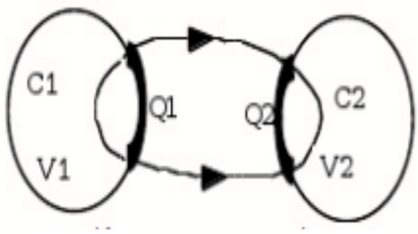


FIGURE 3.7 – Eléments correspondants

de $\overrightarrow{E}$ sortant d'une surface de Gauss s'appuyant sur le tube de champ et se refermant à l'intérieur de C_1 et C_2, nous trouvons 0.
En effet, en tout point de S_G , $\overrightarrow{E}$ est soit parallèle à S_G, soit nul.
L'application du théorème de Gauss mène à la conclusion que la somme des

charges contenues dans S_G est nulle. Or les charges ne peuvent exister que sur les éléments de surface de C_1 et C_2 délimités par le tube de courant, dits éléments correspondants.
C'est donc que les charges q_1 et q_2 portées par les éléments correspondants sont égales et opposées.
Les éléments correspondants portent des charges égales et opposées.
Une ligne de champ joint une zone de C_1 où les charges surfaciques sont positives à une zone de C_2 où elles sont négatives.
Définition : les surfaces découpées par un tube de lignes de champ sur deux conducteurs sont appelées éléments correspondants.

3.2.2 Plan de masse ou terre

On appellera plan de masse ou terre un conducteur plan et de dimension infini dont le potentiel est pris comme référence. Les potentiels des autres conducteurs seront calculés par rapport à celui-là. On représentera le plan de masse comme ceci :

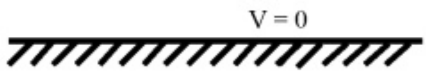


FIGURE 3.8 – Masse

3.2.3 Influence électrostatique sur un conducteur isolé

Soit C un conducteur isolé et non chargé seul dans l'espace ou face à un plan de masse. Il n'y a aucune charge nulle part, donc $V = 0$ partout et $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$. Aucune ligne de champ n'existe.
On approche de C un autre conducteur A chargé positivement. Les charges de A font régner un champ électrique qui agit sur les charges mobiles de C. Dans C, les charges se déplacent. Les négatives se dirigent vers A et les positives s'éloignent de A jusqu'à ce que l'on arrive à une situation d'équilibre où les charges à la surface de C créent à l'intérieur de C un champ qui annule celui que fait régner A. A l'équilibre, la charge totale portée par C est toujours nulle puisque C est isolé. Donc il existe des charges surfaciques positives d'un coté, d'où partent des lignes de champ, et des charges négatives de l'autre coté, où arrivent des lignes de champ.
De A partent des lignes qui vont vers C ou vers l'infini ou la masse. Comme elles se dirigent dans le sens des potentiels décroissants,

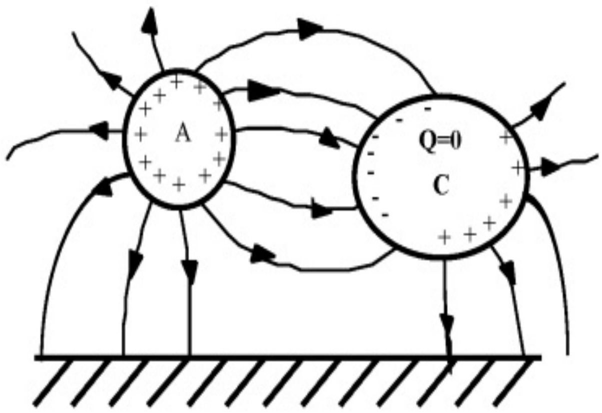


FIGURE 3.9 – Influence électrostatique sur un conducteur isolé

c'est que $V_C < V_A$.
De C partent des lignes qui ne peuvent aller que vers l'infini ou la masse.
C'est donc que $V_C > 0$. Donc $0 < V_C < V_A$ tandis que $Q = 0$.
Sans contact et simplement par influence, on a amené le conducteur C à un potentiel $V_C > 0$.

3.2.4 Influence électrostatique sur un conducteur maintenu

Influence électrostatique sur un conducteur maintenu à V=0 par une liaison à la masse.
Nous partons toujours d'un conducteur seul face à un plan de masse, mais cette fois, il est relié par un fil conducteur à ce plan de masse.
Il n'y a aucune charge nulle part, donc $V = 0$ partout, $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$. Aucune ligne de champ n'existe.
Quand nous approchons de C le conducteur A chargé positivement, nous avons un effet très voisin du précédent, mais cette fois, comme V est maintenu à 0 sur C, aucune ligne de champ ne peut plus sortir de C car aucun endroit n'est à un potentiel plus faible. Donc aucun point de la surface de C ne peut porter de charges positives. Par contre, de A partent des lignes qui vont vers C ou vers l'infini ou la masse. Il y a donc des charges négatives à la surface de C. Nous pouvons en conclure que C porte maintenant une charge totale négative. Nous avons vu que des éléments correspondants portent des charges égales et opposées. Or toutes les lignes de champ qui arrivent sur C viennent de A, tandis que celles qui partent de A ne viennent pas toutes sur C. Donc

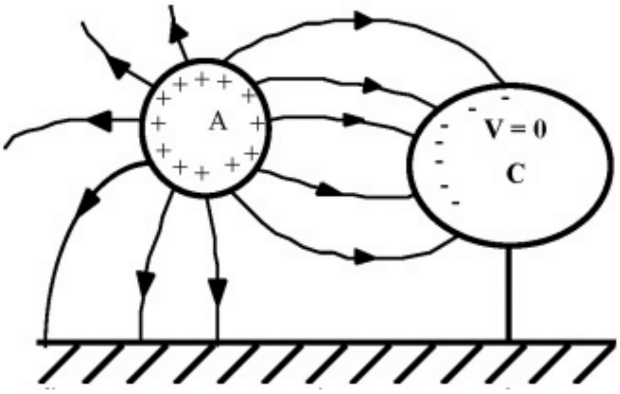


FIGURE 3.10 – Influence électrostatique sur un conducteur maintenu à un potentiel nul

$|Q_C| < |Q_A|$ tandis que $V_C = 0$.
Sans contact et simplement par influence, on a chargé le conducteur C.
Si le contact de C avec la terre est coupé le conducteur C se trouve chargé.

3.2.5 Conducteurs en équilibre - Influence totale

On dit que deux conducteurs sont en influence totale si l'un (A) est à l'intérieur de l'autre (B). Le conducteur influencé (B) entoure complétement un autre conducteur (A) (influançant).
Toute ligne de champ qui sort de A ne peut aller que sur B. Toute la surface

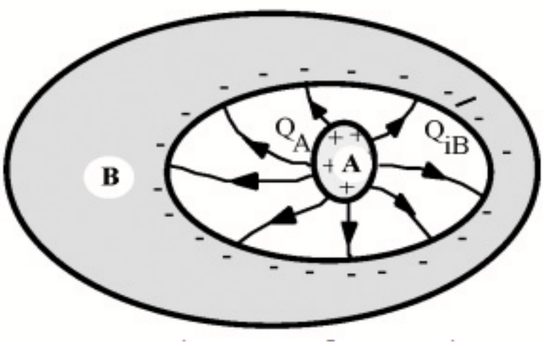


FIGURE 3.11 – Deux conducteurs en influence totale

de A est élément correspondant de la surface interne de B.
A porte donc une charge totale égale Q_A et opposée à celle que porte la

surface interne de B, Q_{iB}.
Si on applique le théorème de Gauss pour calculer le champ $\overrightarrow{E}$ à l'extérieur de B, on voit que seules les charges Q_{eB} situées sur la surface externe de B interviennent puisque celles de la surface interne Q_{iB} sont compensées par Q_A celles que porte A. Donc, le champ électrique à l'extérieur de B ne dépend que de Q_{eB} ; il en est bien sûr de même du potentiel.
Supposons que nous introduisions A chargé à l'intérieur de B. La paroi interne de B se charge d'une quantité $Q_{iB} = -Q_A$.

- Si B reste isolée pendant l'expérience, sa charge totale ne peut pas changer. Donc la paroi externe de B voit sa charge surfacique augmenter de $Q_{eB} = Q_A$ qui s'ajoute donc à une éventuelle charge initiale Q_{Biniti} .
- Si B a été maintenu à un potentiel constant, par exemple par une liaison à la masse, alors sa charge externe n'a pas changé. C'est donc qu'une quantité de charges Q_A s'est écoulée vers la masse par le dispositif de liaison.

La distribution de charges à l'intérieur de B dépend de la position de A dans la cavité.
Celles de la surface externe n'en dépend pas.

3.2.6 Superposition des états d'équilibre

Soit un ensemble de conducteurs géométriquement figé. Dans un état d'équilibre, le potentiel absolu en tout point se calcule par :

$$V = k \iint \frac{\sigma ds}{r}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

cette intégration étant faite pour toutes les charges existantes. Le champ s'obtient de même par :

$$\overrightarrow{E} = k \iint \frac{\sigma ds}{r^2}.\overrightarrow{u}$$

A l'intérieur de tous les conducteurs,

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \quad \Longrightarrow k \iint \frac{\sigma ds}{r^2}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

Supposons qu'un état d'équilibre soit obtenu par une première répartition de charges surfaciques σ_1 et un autre par σ_2.
A l'intérieur de tous les conducteurs,

$$k \iint \frac{\sigma_1 ds}{r^2}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \quad et \quad k \iint \frac{\sigma_2 ds}{r^2}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

Si nous faisons une nouvelle répartition σ_3 qui soit une combinaison linéaire de σ_1 et σ_2 :

$$\sigma_3 = a.\sigma_1 + b.\sigma_2$$

alors à l'intérieur de tous les conducteurs,

$$k \iint \frac{\sigma_3 ds}{r^2}.\overrightarrow{u} = a.k \iint \frac{\sigma_1 ds}{r^2}.\overrightarrow{u} + b.k \iint \frac{\sigma_2 ds}{r^2}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

On aboutit donc à un nouvel état d'équilibre. Les potentiels se calculent par :

$$V_3 = a.k \iint \frac{\sigma_1 ds}{r} + b.k \iint \frac{\sigma_2 ds}{r} = a.V_1 + b.V_2$$

Ceci s'appelle le théorème des états d'équilibre : Etant donné n états d'équilibre d'un ensemble de conducteurs donnés, caractérisés par des densités surfaciques de charges σ_i, une combinaison linéaire de ces états conduit à un nouvel état d'équilibre et le potentiel absolu en tout point est la même combinaison des potentiels des états de départ.

3.2.7 Capacité d'un conducteur seul

Lorsqu'un conducteur en équilibre est seul dans l'espace, sa charge est proportionnelle à son potentiel. Le coefficient de proportionnalité noté C est :

$$C = \frac{Q}{V}$$

appelé capacité du condensateur, exprimée en Farad ($1\mu F = 10^{-6}F, \quad 1nF = 10^{-9}F, \quad 1pF = 10^{-12}F$). La capacité C caractérise le conducteur, elle dépend de la forme et des dimensions géométrique du conducteur.

Exemple :

Calculons la capacité d'une sphère. Nous avons déjà vu que par application du théorème de Gauss, on calculait aisément le champ électrique en tout point. En particulier, nous avons trouvé à l'extérieur un champ $\overrightarrow{E}$ radial et de module :

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

Ce qui donne le potentiel du conducteur :

$$V(x) = \int_x^\infty \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{r} = \int_x^\infty E.dr = k\int_x^\infty \frac{Q}{r^2}dr = kQ.[-\frac{1}{r}]_x^\infty = k\frac{Q}{x}$$

A la surface $x = R$:

$$V = k\frac{Q}{R}$$

Donc,

$$C = k\frac{Q}{V} = k.R = 4\pi\epsilon_0.R$$

Ordre de grandeur : Capacité de la terre ! Son rayon vaut $6400km$.

$$C = 4\pi\epsilon_0.6,4.10^6 = \frac{6,4.10^6}{9.10^9} = 710\mu F.$$

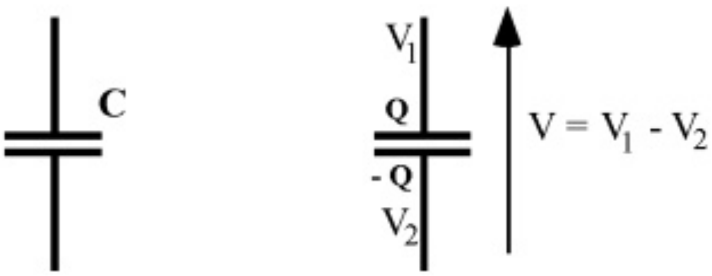
3.3 Condensateur

3.3.1 Définition

Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs en influence totale. Par exemple, C_1 est à l'intérieur de C_2.

3.3.2 Charge et capacité d'un condensateur

La représentation symbolique du condensateur est celle-ci : Les deux

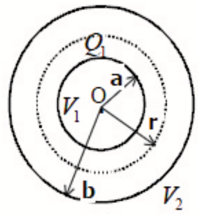


conducteurs sont appelés les armatures du condensateur.
En désignant par V la tension entre les deux armatures, ($V = V_1 - V_2$) et par Q la valeur de la charge portée par les deux faces des armatures en regard ($+Q$ du coté 1 et $-Q$ du coté), on écrit la relation fonfamentale du condensateur (capacité) : $Q = CV = C(V_1 - V_2)$.

3.3.3 Capacité des condensateurs usuels

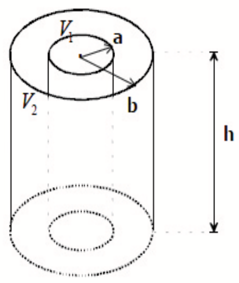
Condensateurs sphérique

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 - V_2} = 4\pi\epsilon_0\frac{ab}{b-a}$$



Condensateurs cylindrique

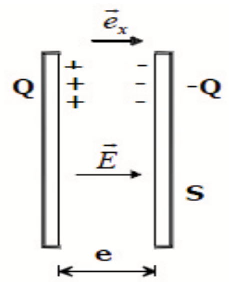
$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{Ln\frac{b}{a}}$$



Condensateurs plan

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

Q et S sont respectivement la charge et la surface d'une armature. e est la distance séparant les armatures du condensateur plan.



3.3.4 Groupement de condensateurs

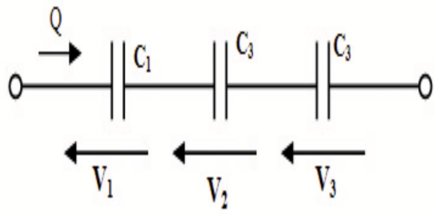
Condensateurs en série

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V_1 = Q/C_1, \quad V_2 = Q/C_2, \quad V_3 = Q/C_3$$

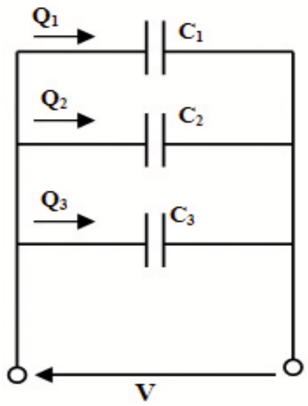
$$V = Q(1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3)$$

L'association en série permet d'obtenir une tension de service plus importante mais diminuera la valeur de la capacité :



$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

Condensateurs en parallèle



$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$
$$Q_1 = C_1 V, \quad Q_2 = C_2 V, \quad Q_3 = C_3 V$$
$$Q = V(C_1 + C_2 + C_3)$$

L'association en parallèle permet d'obtenir une capacité plus importante :

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$

3.3.5 Energie stockée par un condensateur

L'énergie stockée dans un condensateur ne dépend pas de la façon dont il a été chargé, mais de la charge Q accumulée et de la tension U à ses bornes :

$$W = \frac{1}{2} Q.V = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C.V^2$$

W s'exprime en (J), Q en Coulomb (C), V en Volt (V) et C en Farad (F).

Chapitre 4

Lois générales de l'électrocinétique en régime continu

L'**électrocinétique** est l'étude de circuits électriques et est surtout celle du déplacement de l'électricité dans les milieux matériels, par opposition à l'électrostatique qui étudie les phénomènes et les lois relatives à l'électricité immobile.
En électrocinétique, on distingue les **régimes continus**, dans lesquels toutes les grandeurs électriques sont indépendantes du temps, des **régimes sinusoïdaux** pour lesquels les grandeurs électriques sont des fonctions sinusoïdales du temps. Ces deux régimes sont dits **permanents**.
La durée, limitée dans le temps, pendant laquelle un circuit passe d'un régime permanent à un autre est appelée **régime transitoire**.
On dit que le circuit fonctionne en **régime permanent continu** si les intensités passant en chacun de ses points sont indépendantes du temps.

4.1 Courant et tension électrique

4.1.1 Généralités

Un **circuit électrique** est composé de différents éléments ; générateur, récepteur, fils de liaisons, interrupteur sont essentiels au fonctionnement d'un circuit :

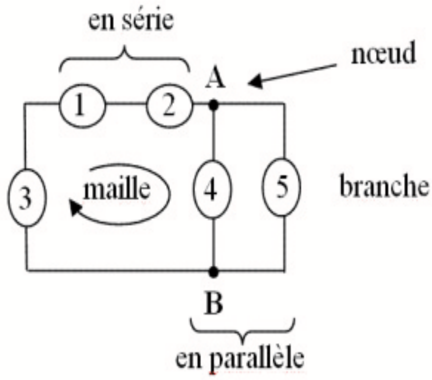
— le générateur est la source d'énergie ;
— l'interrupteur permet au générateur de libérer l'énergie ;
— les fils de liaison véhiculent l'énergie ;
— le récepteur convertit l'énergie en exploitant les effets du courant électrique.

Le générateur et le récepteur possèdent deux bornes de connexion (liaison), ce sont des **dipôles**.
On distingue deux branchements possibles :

— dipôles en série (la sortie de l'un est reliée à l'entrée du suivant) ;
— dipôles en parallèle ou en dérivation (entrées reliées, sorties aussi).

Dans un circuit fermé plus complexe, on distingue alors :

— **la branche** : portion de circuit contenant un ou plusieurs dipôles en série ;
— **le nœud** : connexion ou arrivent plusieurs branches.
— **la maille** : chemin fermé dans un circuit.



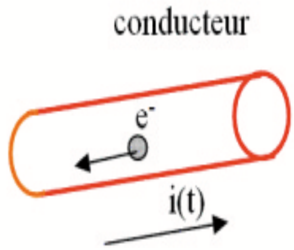
Le circuit ci-contre possède 5 dipôles ; les dipôles 1, 2 et 3 sont en série pour former une branche, les dipôles 4 et 5 sont en parallèle. Le circuit ainsi formé comporte deux nœuds (A et B), trois branches et trois mailles.

4.1.2 Courant électrique

Le courant électrique résulte d'un déplacement d'ensemble, ordonné, de particules portant des charges électriques.

Par convention, le sens du courant correspond à un déplacement des charges positives, donc au sens inverse du déplacement des électrons. L'intensité du courant est la quantité de charges qui passe en un point du circuit pendant un laps de temps donné :

$$i = \frac{dq}{dt}$$



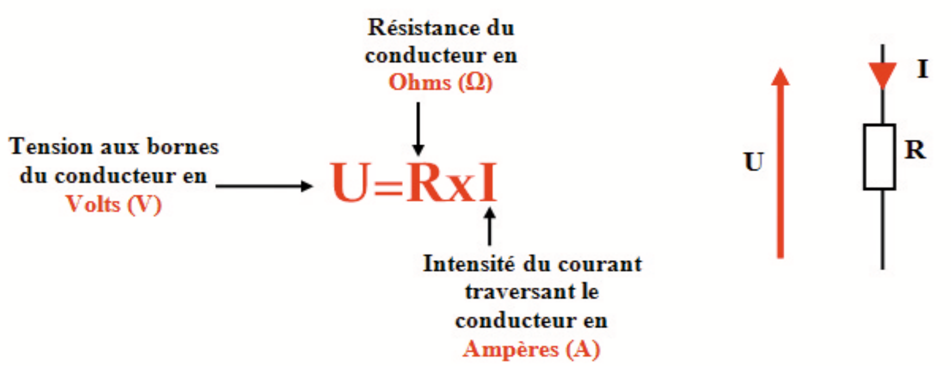
C'est une grandeur algébrique qui a donc un signe. L'intensité se mesure en Ampère (A).

4.1.3 Tension électrique

Pour qu'un courant circule dans un circuit, il faut, au même instant, qu'au moins deux points A et B de ce circuit soient dans des états électriques différents. Ces états électriques sont formulés en terme de potentiels : V_A et V_B.

La différence de potentiel $V_A - V_B = U$ est alors appelée d.d.p. ou **tension électrique**. C'est une grandeur algébrique, son unité de mesure est le volt (V).

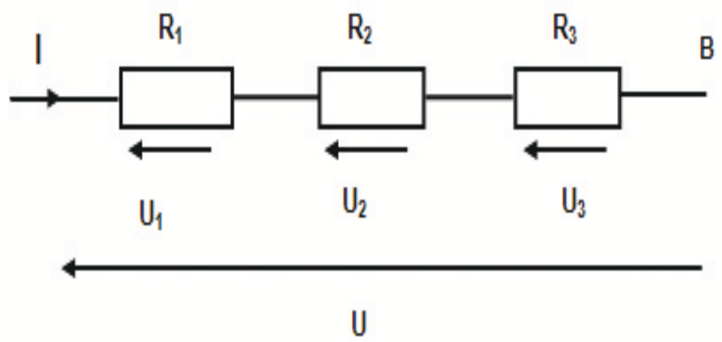
4.1.4 Loi d'Ohm (conducteur ohmique)



Le courant électrique circule du potentiel le plus élevé vers le potentiel le plus bas.

4.1.5 Associations de résistances

Résistances en série : La loi d'Ohm appliquée à chacun des résistors

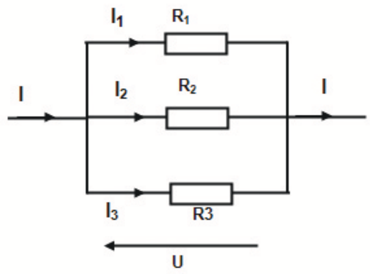


(résistances) donne :
$U_1 = R_1 I, \quad U_2 = R_2 I, \quad U_3 = R_3 I \quad et \quad U = R_{eq} I = U_1 + U_2 + U_3$

$$\Longrightarrow R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

La résistance d'un ensemble de résistances en série est égale à la somme de leurs résistances.

Résistances en parallèle :
L'intensité du courant du générateur est égale à la somme des intensités des courants circulant dans les résistors :
$I = I_1 + I_2 + I_3$
La loi d'Ohm appliquée à chacun des résistors donne :



$U_1 = R_1 I_1 = U_2 = R_2 I_2 = R_3 I_3 = R_{eq} I = U$

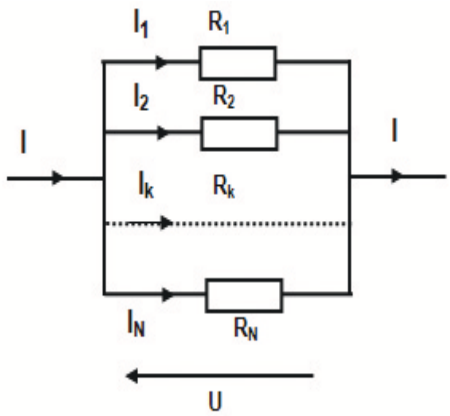
$$I = \frac{U}{R_{eq}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} \Longrightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

La conductance $(1/R)$ d'un ensemble de résistances en parallèle est égale à la somme de leurs conductances.

4.2 Diviseurs de tension et de courant

4.2.1 Diviseurs de courant

Soit une association parallèle des résistances R_k.
Soit R_e la résistance équivalente ; c'est à dire $\frac{1}{R_e} = \sum_k^N \frac{1}{R_k}$, on a donc $U = R_k I_k = R_e I$, avec I est le courant principal, il en résulte que :



$$I_k = \frac{R_e}{R_k} I,$$

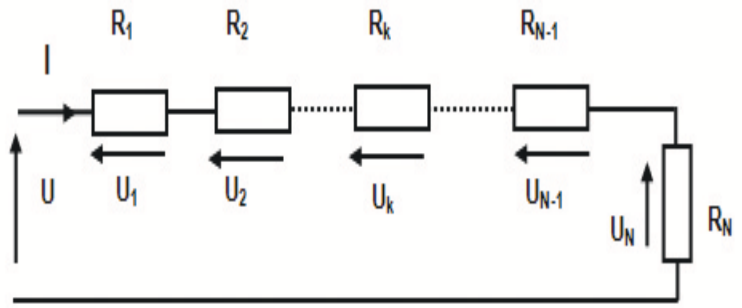
C'est le diviseur de courant.
Cas particulier : $N = 2$,

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I, \quad et \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

Remarque : Si $R_1 = R_2 \Longrightarrow I_1 = I_2 = \frac{I}{2}$.

4.2.2 Diviseurs de tension

Soit une association série de N résistances R_k, $k = 1, ...N$. Soit U_k la tension aux bornes de la résistance R_k et R_e la résistance équivalente c'est à dire $R_e = \sum_k^N R_k$. On a $I = \frac{U_k}{R_k} = \frac{U}{R_e}$; ce qui donne la loi du diviseur de



tension :

$$U_k = \frac{R_k}{R_e} U = \frac{R_k}{\sum R_k} U$$

Cas particulier : $N = 2$,

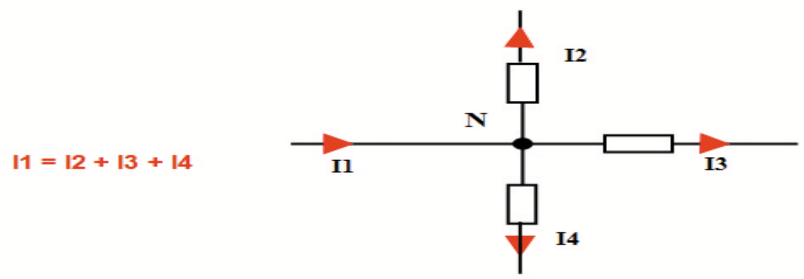
$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \quad et \quad U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

Remarque : si $R_1 = R_2 \Longrightarrow U_1 = U_2 = \frac{U}{2}$.

4.3 Lois de Kirchoff

4.3.1 Loi des nœuds

La somme des charges électriques entrant au nœud N est égale à la somme des charges sortant.
Si un réseau possède (n) nœuds on écrira (n-1) équations indépendantes et le n^{eme} équation dépendra des autres.
La loi des nœuds s'écrit : $\sum \pm I_i = 0$.
On écrit $(+I_i)$ si le courant arrive et $(-I_i)$si le courant quitte le nœud.
Exemple :



4.3.2 Loi des mailles

On nomme loi des mailles une relation entre les tensions dans un circuit fermé. Dans une maille, la somme algébrique des tensions est nulle :

$$V_A - V_A = \sum_i \pm R_i I_i + \sum_i \pm E_i = 0$$

Dans l'application de cette loi, il convient de choisir un sens de parcours et on doit tenir comptes des règles suivantes :

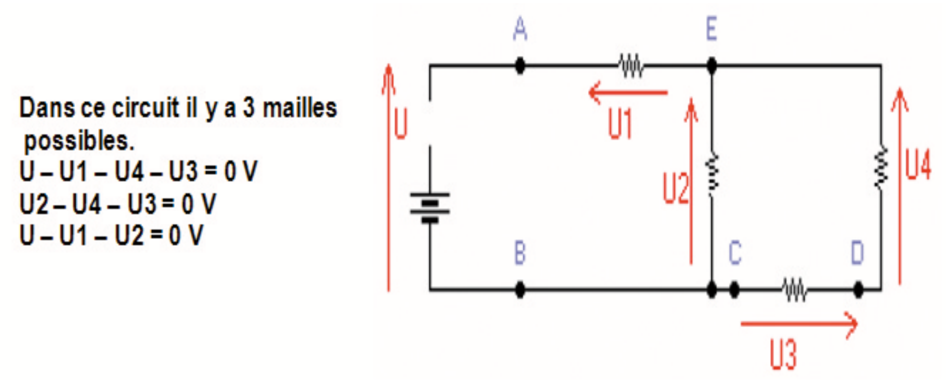
— On met le signe (+) devant $R_i I_i$ si le sens de parcours est le même que celui du courant, sinon on met le signe (-).

— Pour un appareil polarisé qu'il soit générateur ou récepteur : on met le $+E_i$ si on rencontre le pôle (+) en premier ; et $-E_i$ si on rencontre le pôle (-) en premier.

Si le réseau possède b branches, donc b inconnues, le nombre d'équations indépendantes aux mailles est $(b - (n - 1))$ où n est le nombre de noeuds.

Exemple :

Lorsqu'on parcourt la tension dans le sens de la flèche, alors le signe +.



Lorsqu'on parcourt la tension dans le sens inverse de la flèche, alors le signe est -.

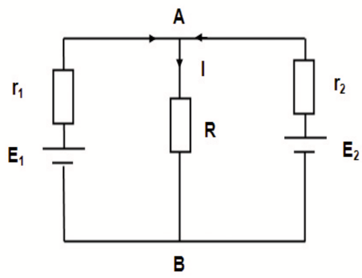
4.4 Principe de superposition

Dans un réseau dont tous les éléments sont linéaires, l'intensité qui circule dans un dipôle est la somme algébrique des intensités créées dans ce dipôle par chaque générateur du circuit pris isolement (les autres générateurs étant alors remplacés par leurs résistances internes).

Ce principe également valable pour les tensions est la conséquence de la linéarité des équations de Kirchhoff.

Application :

On considère deux générateurs (E_1, r_1) et (E_2, r_2) de f.e.m E_1 et E_2, et de résistance internes respectives r_1 et r_2. Ces deux générateurs débitent dans la résistance R. Calculer l'intensité du courant I qui circule dans R en utilisant le principe de superposition.



Solution :

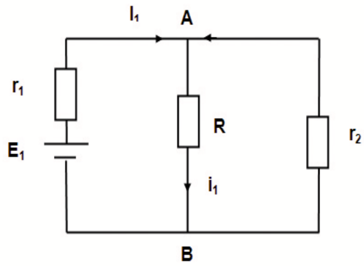
$I = i_1 + i_2$, les intensités des courants i_1 et i_2 se calculent à partir des états 1 et 2.

- Etat 1 : $I_1 = \frac{E_1}{r_1 + \frac{Rr_2}{R+r_2}}$

$V_A - V_B = I_1 \frac{Rr_2}{R+r_2} = \frac{E_1 \frac{Rr_2}{R+r_2}}{r_1 + \frac{Rr_2}{R+r_2}} = E_1 \frac{Rr_2}{Rr_2 + r_1(R+r_2)}$

$V_A - V_B = Ri_1$

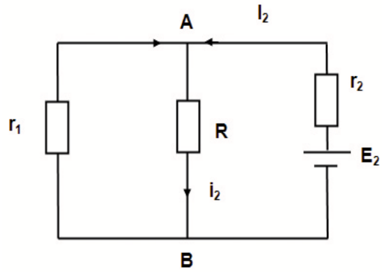
$\Longrightarrow i_1 = \frac{V_A - V_B}{R} = E_1 \frac{\frac{r_2}{R+r_2}}{r_1 + \frac{Rr_2}{R+r_2}} = E_1 \frac{Rr_2}{Rr_2 + r_1(R+r_2)}$



- Etat 2 : $I_2 = \frac{E_2}{r_2 + \frac{Rr_1}{R+r_1}}$

$V_A - V_B = E_2 \frac{Rr_1}{Rr_1 + r_2(R+r_1)} = Ri_2$

$\Longrightarrow i_2 = \frac{V_A - V_B}{R} = E_2 \frac{r_1}{Rr_1 + r_2(R+r_1)}$

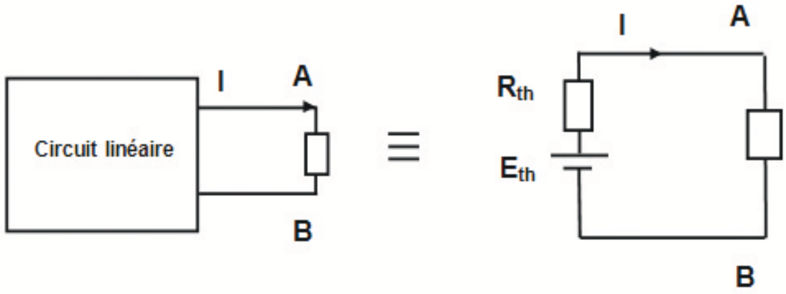


D'où :

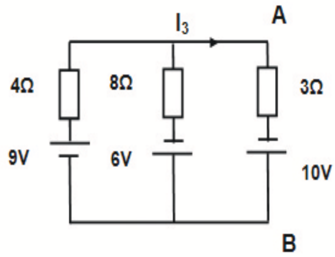
$$I = i_1 + i_2 = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}$$

4.5 Théorème de Thévenin

On peut remplacer tout circuit linéaire, qui alimente par les bornes A et B un dipôle D, par un générateur de tension idéal en série avec une résistance Rt. La fem E_{Th} du générateur est égale à la d.d.p mesurée entre A et B quand le dipôle D est débranché. La résistance R_{Th} est égale à la résistance mesurée entre A et B quand le dipôle D est débranché et que les générateurs sont remplacés par leurs résistances internes.



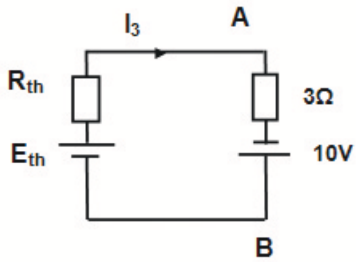
Application :
En utilisant le théorème de Thévenin, calculer l'intensité du courant I_3 circulant dans la branche AB du circuit ci-contre :



Soultion :
- Résistance interne du générateur de Thévenin : on courcircuite les f.e.m du circuit pris entre A et B. La résistance équivalente est :

$$R_{Th} \equiv 4\Omega/8\Omega \Longrightarrow R_{Th} = \frac{4 \times 8}{4+8} = 2.66\Omega$$

- La fem du générateur de Thévenin :



$$E_{Th} = (V_A - V_B)a \quad vide$$

La loi d'Ohm entre A et B :

$$(V_A - V_B) = 9 - 4I = 8I - 6 \Longrightarrow I = (\frac{15}{12})A$$

$$(V_A - V_B) = 9 - 4(\frac{15}{12}) = 4V \Longrightarrow E_{Th} = 4V$$

- Le courant I_3 circulant dans la branche AB :

$$E_{Th} - R_{Th}I_3 = 3I_3 - 10 \Longrightarrow I_3 = 2.47A$$

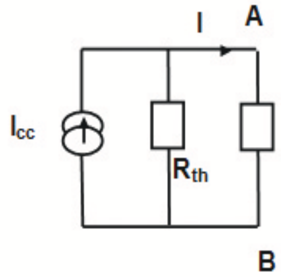
4.6 Théorème de Norton

Le générateur équivalent défini précédemment (générateur de Thevenin) peut être réalisé, aussi, par un générateur de courant (appelé générateur de

Norton) en parallèle avec une résistance R_N.
Pour le générateur de Thevenin, la d.d.p entre ses bornes A et B :

$$(V_A - V_B) = E_{Th} - R_{Th} I$$

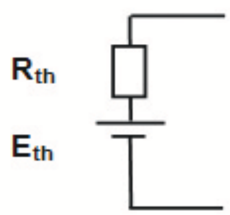
Si on divise les deux membres de l'égalité par $R_{Th}, (T_{Th} \neq 0)$, on obtient :

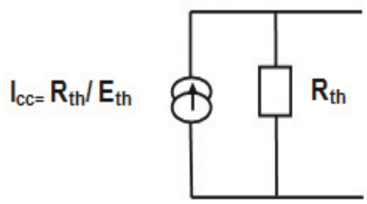


$$\frac{V_A - V_B}{R_{Th}} = \frac{E_{Th}}{R_{Th}} - I$$

En posant $I_{cc} = \frac{E_{Th}}{R_{Th}}$, on écrira $I = I_{cc} - \frac{V_A - V_B}{R_{Th}}$

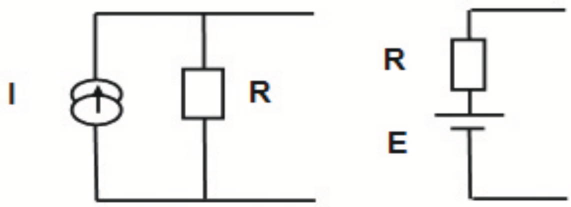
I_{cc} est le courant du modèle de Norton. La résistance $R_N = R_{Th}$





Générateur de tension **Générateur de courant équivalent**

De même, connaissant I_{cc} et R_N on peut trouver la fem et la résistance interne du génértaeur de Thevevnin :

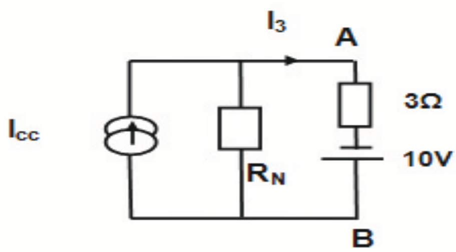


Générateurs équivalents

Pour l'exercice précédent, l'intensité du modèle de Norton est égale :

$$I_{cc} = \frac{E_{Th}}{R_{Th}} = \frac{4}{2.66} = 1.5A$$

El la résistance du générateur de Norton est :
$R_N = R_{Th} = 2.66\Omega$



$$I_3 = I_{cc} - \frac{V_A - V_B}{R_{Th}}$$

Remarque : Détermination de R_{Th} ($=R_N$) :
Pour déteminer l'expression de R_{Th} ou de R_N, il suffit d'éteindre les sources indépendantes de tension et de courant, sachant que :
- éteindre une source de tension revient à la remplacer par un fil ($E_0 = 0$).
- éteindre une source de courant revient à la remplacer par un interrupteur ouvert ($I_0 = 0$).